



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI BARI  
ALDO MORO

**dib** DIPARTIMENTO DI  
INFORMATICA

---

**Dottorato di ricerca in Informatica e Matematica  
XXXI ciclo**

**Progetto di ricerca**

**Dottoranda:** Dott.ssa Sabrina Francesca Pellegrino

**Tutor:** Prof. Giuseppe Maria Coclite

Firma del dottorando \_\_\_\_\_

Firma del tutor \_\_\_\_\_

## 1) Titolo della ricerca

Salt fingers in dinamica dei fluidi.

## 2) Area nella quale si inquadra la ricerca

Equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo iperbolico.

## 3) Obiettivi della ricerca

Nell'evoluzione di fluidi quali l'acqua salata dell'oceano si presentano fenomeni quali quello dei salt fingers. Uno dei modelli adottati per descrivere tale fenomeno è il seguente [1]:

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x(\Phi(u)\partial_x u) + \alpha - \Phi(u)\partial_x v - \beta u \sqrt{\partial_x v}, & t > 0, 0 < x < 1, \\ \partial_t v = \partial_x(\Phi(u)\partial_x v), & t > 0, 0 < x < 1, \\ \partial_x u(t, 0) = \partial_x u(t, 1) = 0, & t > 0, \\ \partial_x v(t, 0) = \partial_x v(t, 1) = 0, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), v(0, x) = v_0(x), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

nelle incognite

$$u = u(t, x), \quad v = v(t, x),$$

dove  $u$  è la *media orizzontale dell'energia cinetica*,  $v$  è la *buoyancy*, e

$$\Phi(u) = \sqrt{u} f(\sqrt{u}).$$

Sulla funzione  $f$  assumiamo che

$$\begin{aligned} f &\in C^\infty(\mathbb{R}), & f, f' &> 0, & f'(\mu) &= k_2 = \max f, \\ f'(\xi) &\leq k_1 & \forall x &\notin (\mu - \delta, \mu + \delta), \end{aligned}$$

dove  $\alpha, \beta, \delta, k_1, k_2$  sono dei parametri positivi tali che

$$\mu - \delta > 0, \quad k_1 < k_2.$$

Sulle condizioni iniziali  $u_0, v_0$  assumiamo

$$u_0, v_0 \in H^1(0, 1), \quad u_0 \geq 0, \quad v_0' \geq 0.$$

Vogliamo studiare

- l'esistenza, l'unicità e la stabilità delle soluzioni di tale modello;
- le proprietà asintotiche, ossia cosa accade se  $f$  tende alla funzione di Heaviside  $\chi_{[0,\infty)}$ ;
- alcune generalizzazioni del modello: le precedenti equazioni, infatti, rappresentano una classe di modelli ideata per generalizzare le idee derivanti dal modello di Perona-Malik

$$\partial_t u = -\partial_x F(\partial_x u)$$

evitando il problema della mal-positura della diffusione negativa che occorre in corrispondenza di  $F' > 0$ .

## 4) Motivazioni della ricerca

Il fenomeno di salt fingering è un processo di mescolamento che avviene quando acqua salata e relativamente calda si sovrappone ad acqua dolce e relativamente più fredda. Causa del fenomeno è il fatto che l'acqua calda diffonde più facilmente rispetto all'acqua salata. Una particella d'acqua profonda, spostata verso l'alto, acquista per diffusione la temperatura del fluido circostante molto più rapidamente di quanto non acquisti salinità. Perciò, a mano a mano che sale, essa diviene sempre più leggera, fino a raggiungere un equilibrio fra velocità di ascesa, frizione viscosa e diffusione di temperatura. Analogamente, una particella d'acqua superficiale, spostata più in basso, si raffredda, ma perde assai poca salinità, diventando quindi più pesante del fluido circostante.

La poca conoscenza riguardo ai flussi verticali di salinità e, soprattutto, di temperatura costituisce l'incognita fondamentale che non ci permette di descrivere in modo soddisfacente il bilancio termodinamico degli oceani. E questo, a sua volta, è uno degli elementi che genera maggiore incertezza nella comprensione del sistema climatico del pianeta Terra. L'impossibilità pratica di simulare un intero oceano, risolvendo scale così piccole come quelle dei salt fingers, implica che solo una descrizione matematica che semplifichi e riassuma in una formula maneggevole l'effetto dei salt fingers (e, sperabilmente, di altri fenomeni di piccola scala), può dare le risposte che la comunità dei climatologi attende da tempo.

Per oceanografi, compagnie petrolifere e geologi, infatti, è fondamentale riuscire a simulare questi fenomeni per tempi lunghi e con alta precisione. Per elaborare schemi numerici siffatti è fondamentale conoscere dettagliatamente le proprietà analitiche del modello. Questo è l'obiettivo che ci prefiggiamo in questa tesi.

## 5) Stato dell'arte

- In [1], gli autori propongono un modello matematico che descrive la dinamica della media orizzontale dell'energia cinetica e l'instabilità del meccanismo di staircase formation. Essi studiano, inoltre, la stabilità lineare delle soluzioni stazionarie del problema.
- In [2], gli autori esaminano la statistica delle fluttuazioni degli scalari attivi, temperatura, salinità e buoyancy, in corrispondenza di elevati numeri di Rayleigh, e dimostrano la non-gaussianità della statistica della buoyancy.
- In [3], gli autori, in seguito a delle simulazioni numeriche, suggeriscono un nuovo meccanismo di staircase formation: la convezione è dominata da strutture a forma di goccia dette *blobs*, che, raggruppandosi in clusters, localmente compensano il flusso lungo gradiente generato dai processi di doppia diffusione.
- In [4], gli autori propongono un modello per fluidi meccanicamente mescolati e stabilmente stratificati che tiene conto della produzione e della dissipazione di energia cinetica.

## 6) Approccio al problema

Intendiamo studiare la buona positura del problema (ossia esistenza, unicità e stabilità) passando attraverso una sua approssimazione ottenuta sostituendo  $\Phi(u)$  con  $\Phi_\varepsilon(u) = (\sqrt{u} + \varepsilon)f(u)$ . Questo è fisicamente ragionevole perché  $\varepsilon$  rappresenta una viscosità molecolare.

Uno degli strumenti fondamentali che intendiamo usare è il principio di massimo su  $\partial_x v$ : se  $v_0$  è nondecreciente allora, per ogni  $t > 0$  anche  $v(t, \cdot)$  lo è.

## 7) Ricadute applicative

Il fenomeno di salt fingers causa nei fluidi stabilmente stratificati un rapido mescolamento verticale di calore, di nutrienti e di sostanze disciolte, come sale, ferro, ossigeno, etc. Tale mescolamento è più efficace di quello dovuto alla presenza di moti turbolenti, di vortici o di correnti, e aiuta a regolare la graduale circolazione nell'oceano, influenzando fortemente il clima terrestre e favorendo la vita di flora e fauna.

Oltre a essere applicato a problemi oceanografici, lo studio del fenomeno permette applicazioni anche in geologia, in astrofisica e in metallurgia.

## 8) Riferimenti bibliografici

- [1] F. PAPARELLA, J. VON HARDENBERG. *A Model for Staircase Formation in Fingering Convection*. Acta Appl Math. **132** 457-467 (2014).
- [2] J. VON HARDENBERG, F. PAPARELLA. *Non-Gaussian buoyancy statistics in fingering convection*. Phys. Lett. A **374** 2646-2653 (2010).
- [3] F. PAPARELLA, J. VON HARDENBERG. *Clustering of salt fingers in double-diffusive convection leads to staircaselike stratification*. Phys. Rev. Lett. **109** 014502 (2012).
- [4] N. J. BALMFORTH, S. G. LLEWELLYN-SMITH, W. R. YOUNG. *Dynamics of interfaces and layers in a stratified turbulent fluid*. J. Fluid Mech. **355** 329-358 (1998).
- [5] L. C. EVANS. *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics, vol.19, American Mathematical Society, Providence, RI, (1998).

## 9) Fasi del progetto

- 1) Ricerca bibliografica.
- 2) Studio delle pubblicazioni.
- 3) Analisi del problema.
- 4) Formulazione e dimostrazione di teoremi.
- 5) Generalizzazione dei risultati ottenuti.
- 6) Stesura di eventuali articoli da sottoporre a pubblicazione.
- 7) Stesura della tesi.

## 10) Valutazione dei risultati

I risultati della ricerca potranno essere dichiarati raggiunti nel momento in cui si sia trovata una generalizzazione totale o parziale del problema. Inoltre i risultati raggiunti durante la ricerca verranno discussi tramite colloqui diretti con gli esperti del settore, anche in occasioni di soggiorni presso altre sedi universitarie e di partecipazione a convegni. Verranno anche contattati referee che si esprimeranno sul percorso della ricerca.

## 11) Eventuali referenti esterni al Dipartimento

Francesco Paparella, Ricercatore presso il Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi", Università del Salento, Lecce.