UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Dottorato di ricerca in Informatica e Matematica
XXXI ciclo

Progetto di ricerca

Dottorando: Dott.ssa Maria Elena Griseta
Tutor: Dott. Vitonofrio Crismale

Firma del dottorando ______________________________

Firma del tutor ______________________________

1) Titolo della ricerca: Processi Stocastici Quantistici e loro Simmetrie

2) Area nella quale si inquadra la ricerca:

Probabilità Quantistica e Algebre di Operatori

3) Obiettivi della ricerca

Si intende fornire una costruzione di versioni quantistiche di processi gaussiani classici nel caso in cui la quantizzazione è di tipo Booleana o Monotona o, più in generale, quella associata alle regole di commutazione cui obbediscono gli operatori di creazione-distruzione in spazi di Fock interagenti. Sulla scorta dei risultati raggiunti, si vogliono studiare alcune proprietà (ad esempio la Markovianità, la scambiabilità, la stazionarietà e la spreadability) degli oggetti costruiti.

Si intende inoltre estendere l’integrazione stocastica quantistica di Hudson-Parthasarathy nel caso in cui i processi stocastici sono rappresentati da algebre di von Neumann di tipo III o da algebre che agiscono in modo irriducibile.

4) Motivazioni della ricerca

I processi stocastici quantistici, definiti in primo luogo in [7], hanno rappresentato negli ultimi trenta anni un filone di ricerca molto studiato in Probabilità Quantistica per via della loro vitale presenza in molti fenomeni fisici derivanti dalla Meccanica Quantistica e dalla Teoria Quantistica dei Campi. Per il primo problema che si vuole affrontare, sono stati trovati esempi nel caso di processi costruiti sulla quantizzazione cosiddetta *q*-deformata, dove è possibile interpolare i casi Bosonico, Fermionico, ottenendo tra l’altro il cosiddetto caso Free (i.e. Boltzmann). Nessuna indagine è stata finora svolta per strutture più generali quali quelle legate in generale agli spazi di Fock interagenti. Per il secondo problema, invece si è sviluppato un calcolo stocastico quantistico che coinvolge la rappresentazione associata ad un’algebra di von Neumann dotata meramente di uno stato traccia normale e fedele, che notoriamente non è il caso più comune.

La soluzione dei problemi presentati risulta interessante perché permette di dare alcune risposte a questioni aperte in Fisica Teorica, in particolare in Meccanica Quantistica dei Campi e Meccanica Statistica Quantistica.

5) Stato dell’arte

La Meccanica Quantistica, nata all'inizio del XX secolo per spiegare tutta una serie di fenomeni fisici che risultavano inspiegabili nell’ambito della fisica classica, dà origine ad una nuova probabilità, completamente diversa da quella tradizionale. Nella sua monografia del 1932 [43], J. von Neumann ha unificato i modelli di probabilità classica e quantistica in un elegante formalismo algebrico che ancora oggi costituisce uno dei pilastri fondanti della nuova teoria probabilistica. La monografia di von Neumann e il suo successivo lavoro con Murray sulle algebre di operatori (che ora sono dette "algebre di von Neumann" in suo onore), ha dato luogo all’analogo quantistico (o non commutativo) della teoria della misura. In tale occasione è utile ricordare che la teoria della misura classica è stata la base scelta da A.N. Kolmogorov per descrivere i modelli matematici della teoria della probabilità classica. Tuttavia, il fatto che la monografia di Kolmogorov [31] è apparsa nel 1933, esattamente un anno dopo quella di von Neumann, è probabilmente dovuto all'assenza,

nel libro di von Neumann, delle tre nozioni di base che Kolmogorov individua per distinguere la teoria generale della misura dalla teoria della probabilità, e cioè: i processi stocastici, l'attesa condizionata e l'indipendenza stocastica.
Proprio come era accaduto con la probabilità classica e la teoria della misura, la nascita della Probabilità Quantistica (QP) come disciplina matematica a se stante e con un proprio campo di applicazioni, doveva passare attraverso lo sviluppo di una prima formulazione matematica delle tre nozioni sopra menzionate, insieme alle dimostrazioni di importanti risultati non banali. Questo è accaduto a partire dagli anni '70 del secolo scorso e ha portato allo sviluppo dei processi stocastici quantistici [7, 30, 5, 16, 37, 17, 19], alla definizione di attesa condizionata e sue proprietà [41, 3, 1, 6], allo studio dell'indipendenza stocastica e teoremi algebrici di limite centrale [22, 29, 42, 39, 8, 32, 40, 36, 14, 4, 12].
Per quanto riguarda la vasta letteratura inerente i processi stocastici, un risultato ottenuto da Bozejko, Kummerer e Speicher [17] ha permesso di determinare versioni quantistiche di alcuni processi stocastici gaussiani. Tale costruzione comprende l'analogo free e q-deformato del moto browniano e del processo di Ornstein-Uhlenbeck. Essa è di tipo funtoriale e prevede prima la scelta della covarianza che fissa il prodotto interno dello spazio di Hilbert di una particella singola e, successivamente la scelta delle relazioni di commutazione come regole di quantizzazione. Poiché in letteratura manca un'analoga costruzione nel caso in cui la struttura comprende alcuni casi di naturale applicazione, come i processi Booleani [44, 15, 13, 28] e i Monotoni [32, 33, 35, 21, 20], nonché forme diverse di covarianza, risulta rivestire un particolare interesse costruire processi stocastici su spazi di Fock interagenti [9, 10, 2, 4, 19, 21, 34] (che contemplano al loro interno i casi Booleano e Monotono) e considerare diverse forme per la covarianza che permettano di costruire processi stocastici markoviani su varietà multidimensionali [18, 26, 6, 27].

L'estensione del calcolo stocastico (alla Ito) nel caso non commutativo, dopo numerosi tentativi, è stata effettuata con successo da Hudson e Parthasarathy [30] nel caso Bosonico. In tale contesto si è messo in luce anche l'intimo legame esistente tra correzione di Ito e principio di indeterminazione di Heisenberg. Successivamente molti altri matematici hanno sviluppato un calcolo simile o basato su un differente approccio, per strutture costruite su regole di commutazione non bosoniche, [11, 24, 5, 16, 38, 25, 23, 15, 19]. Solitamente, nei casi sopra menzionati, si parte da una rappresentazione associata ad uno spazio di probabilità W*, fomato cioè da una W * -algebra dotata di uno stato traccia normale e fedele. In tal modo, pur in presenza di risultati di rilievo (si pensi ai fattori di tipo II_1), si esclude automaticamente la situazione più comune in Fisica, cioè quella associata al caso di fattori di tipo III, i quali appaiono in maniera naturale in Teoria Quantistica dei Campi e in Meccanica Statistica Quantistica, e anche il caso in cui un'algebra di von Neumann agisce in maniera irriducibile (una situazione tipica associata ai cosiddetti ”ground state”, o semplicemente quando l'algebra è un fattore di tipo I e lo stato è puro). Si vuole pertanto estendere l'integrazione stocastica alla Ito-Hudson-Parthasarathy a situazioni più generali che includano sia il caso in cui lo stato coinvolto è fedele ma la struttura modulare associata non è banale, sia il caso in cui lo stato non è fedele.

6) Approccio al problema

Dopo uno studio approfondito della letteratura inerente il problema da affrontare, si intende anzitutto investigare il problema della determinazione dei processi stocastici in casi meno complessi da un punto di vista computazionale (ad esempio il caso Booleano) per poi passare, grazie agli eventuali risultati raggiunti, allo studio di strutture più generali. Successivamente si intende fornire esempi di applicazioni fisiche. Per quanto riguarda il calcolo stocastico, si intende dapprima determinare la classe degli operatori integrabili, poi costruire l'integrale stocastico rispetto ad essi, ed investigare il problema dell’esistenza ed unicità di soluzioni per equazioni differenziali stocastiche quantistiche. Nel caso in cui vi è un’unica soluzione, si intende valutare sotto quali condizioni essa risulta un operatore unitario.

7) Ricadute applicative

Al momento crediamo che i possibili scenari applicativi della ricerca in esame saranno concentrati su alcuni aspetti della Fisica Teorica, come già sopra menzionato. In particolare gli esempi di campi Markoviani quantistici, derivanti dallo studio dei processi stocastici, hanno una ricaduta diretta su problemi aperti di Teoria Quantistica dei Campi. L’integrazione stocastica invece ha applicazioni dirette in alcuni problemi sia di Teoria Quantistica dei Campi che di Meccanica Statistica Quantistica.

8) Riferimenti bibliografici

[1] L. Accardi, *The noncommutative Markov property* (Russian), Funkcional. Anal. i Priloˇzen. **9** (1975), 1-8.

[2] L. Accardi and M. Bozejko, *Interacting Fock Space and Gaussianization of probability measures*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 1 no. 4 (1998) 663-670.

[3] L. Accardi and C. Cecchini, *Conditional expectations in von Neumann algebras and a theorem of Takesaki*, J. Funct. Anal. 45 (1982) 245-273.

[4] L. Accardi, V. Crismale and Y.G. Lu, *Constructive universal central limit theorems based on interacting Fock spaces*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **8** no.
4 (2005) 631-650.

[5] L. Accardi, F. Fagnola and J. Quaegebeur, *A representation free quantum stochastic calculus*, J. Funct. Anal. 104 (1992) 149-197.

[6] L. Accardi and F. Fidaleo, *Non homogeneous quantum Markov states and quantum Markov fields*, J. Funct. Anal. **200** (2003), 324-347.

[7] L. Accardi, A. Frigerio and J.T. Lewis, *Quantum stochastic processes,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **18** (1982), 97-133.

[8] L. Accardi, Y. Hashimoto and N. Obata, *Notions of independence related to the free group*. Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 1 (1998), no. 2, 201–220.

[9] L. Accardi, Y.G.Lu, *The Wigner semi-cirle law in quantum electrodynamics*, Comm. Math. Phys. 180 no. 3 (1996) 605-632.

[10] L. Accardi, Y.G. Lu and I. Volovich, *The QED Hilbert module and interacting Fock Spaces*, International Institute for Advances Studies Publications, Kyoto, (1997).

[11] D. Applebaum and R.L Hudson, *Fermion Ito's formula and stochastic evolutions*, Comm. Math. Phys. 96 (1984) 473-496.

[12] A. Ben Ghorbal and V. Crismale, *Independence arising from interacting Fock spaces and related central limit theorem*, Probab. Math. Statist. 29 (2009), no. 2, 251–269.

[13] A. Ben Ghorbal, V. Crismale and Y.G. Lu, *A constructive Boolean central limit theorem*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) 10 (2007), no. 3, 593–604.

[14] A. Ben Ghorbal and M. Schurmann, *Non-commutative notions of stochastic independence*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 133 (2002), no. 3, 531–561.

[15] A. Ben Ghorbal and M. Schurmann, *Quantum stochastic calculus on Boolean Fock space*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 7 no. 4 (2004) 631-650.

[16] P. Biane and R. Speicher, *Stochastic calculus with respect to free Brownian motion and analysis on Wigner space*, Probab. Theory Related Fields 112 (1998), no. 3, 373–409.

[17] M. Bozejko, B. Kummerer and R. Speicher, *q-Gaussian processes: non-commutative and classical aspects*, Commun. Math. Phys. **185** (1997), 129-154.

[18] O. Bratteli and D.W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics I, II*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, (1981).

[19] V. Crismale, *Quantum stochastic calculus on interacting Fock spaces: semimartingale estimates and stochastic integral*, Commun. Stoch. Anal. 1 (2007), no. 2, 321–341.

[19] V. Crismale and F.Fidaleo, *Exchangeable stochastic processes and symmetric states in quantum probability*, Ann. Mat. Pura Appl., **194** (2015), 969-993.

[20] V. Crismale, F. Fidaleo and Y.G. Lu, *Ergodic theorems in quantum probability: an application to the monotone stochastic processes*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., to appear, doi: 10.2422/2036-2145.201506 009.

[21] V. Crismale and Y.G. Lu, *Rotation invariant interacting Fock spaces*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **10** (2007), 211-235.

[22] C. D. Cushen and R. L. Hudson., *A quantum-mechanical central limit theorem*, J. Appl. Probability **8 (**1971), 454–469.

[23] C. Donati Martin, *Stochastic integration with respect to* q *Brownian motion*, Probab. Theory Related Fields 125 (2003), no. 1, 77–95.

[24] F. Fagnola, *On quantum stochastic differential equations with unbounded coefficients*, Probab. Theory Related Fields 86 (1990), no. 4, 501–516.

[25] F. Fagnola and S.J. Wills, *Solving quantum stochastic differential equations with unbounded coefficients*, J. Funct. Anal. 198 (2003), no. 2, 279–310.

[26] M. Fannes, B. Nachtergaele and R.F. Werner, *Finitely correlated states on quantum spin chains*, Comm. Math. Phys. 144 (1992), no. 3, 443–490.

[27] F. Fidaleo, *Fermi Markov states*, J. Operator Theory, **66**, (2011) 385–414.

[28] F. Fidaleo, *A note on Boolean stochastic processes*, Open Syst. Inf. Dyn. **22** no. 1 (2015), 1550004, 10 pp.

[29] N. Giri, W. von Waldenfels, *An algebraic version of the central limit theorem,* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **42** (1978), no. 2, 129–134.

[30] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, *Quantum Ito's formula and stochastic evolutions*, Commun. Math. Phys. **93** (1984), 301-323.

[31] A. N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer (1933).

[32] Y.G. Lu, *An interacting free Fock space and the arcsine law*, Prob. Math. Stat. **17** (1997), 149-166.

[33] Y.G. Lu, *Interacting Fock spaces related to the Anderson model* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 1 no. 2 (1998) 247-283.

[34] Y.G. Lu, *Gaussian type interacting Fock spaces*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 11(2008), no. 4, 475–494.

[35] N. Muraki, *Noncommutative Brownian motion in monotone Fock space,* Comm. Math. Phys. 183 (1997), no. 3, 557–570.

[36] N. Muraki, *Monotonic independence, monotonic central limit theorem and monotonic law of small numbers*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 4 (2001), no. 1, 39–58.

[37] M. Schurmann, *White noise on bialgebras*. Lecture Notes in Mathematics, 1544.Springer-Verlag, Berlin, (1993).

[38] M. Skeide, *Quantum stochastic calculus on full Fock modules*, J. Funct. Anal. 173 (2000) 401-452.

[39] R. Speicher, *A new example of "independence" and "white noise"*, Probab. Theory Related Fields 84 (1990), no. 2, 141–159.

[40] R. Speicher, *On universal products,* Free probability theory (Waterloo, ON, 1995), 257–266, Fields Inst. Commun., 12, *Amer. Math. Soc., Providence, RI,* (1997).

[41] M. Takesaki, *Theory of operator algebras I, II, III*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, (2003).

[42] D. V. Voiculescu, *Symmetries of some reduced free product C$*$-algebras*, Operator algebras and their connections with topology andergodic theory, LNM **1132**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1985), 556-588.

[43] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer (1932).

[44] W. von Waldenfels, *An approach to the theory of pressure broadening of spectral lines*, in: ”Probability and Information Theory II”, M. Behara, K. Krickeberg and J. Wolfowitz (eds), Lect. Notes Math. Vol. 296, Springer, Berlin- Heidelberg-New York (1973), 19-69.

9) Fasi del progetto

Si prevede che il progetto possa svilupparsi nelle seguenti fasi.

1) Ricerca bibliografica, da attuarsi nel primo anno di corso, al fine di ottenere una panoramica completa dello stato dell'arte presente. Strumenti fondamentali saranno l'utilizzo di banche dati che favoriscono il reperimento del materiale attraverso l'utilizzo di parole chiave e\o forniscono informazioni sul materiale stesso tramite recensioni.

2) Studio dettagliato del materiale di cui al punto 1), da svolgersi inizialmente in concomitanza con la ricerca delle stesso. Tale studio proseguirà nei primi mesi del secondo anno di corso.

3) Formulazione di nuovi risultati. In tale fase, così come nelle precedenti, sarà fondamentale il confronto con il tutor o con altri esperti del settore, sia interni che esterni all'ateneo.

I risultati che si attendono sono legati alla costruzione di processi stocastici gaussiani che prevedono l'analogo Booleano e Monotono di alcuni importanti processi stocastici classici, nonché la formulazione di integrale stocastico quantistico in alcuni casi che comprendono la rappresentazione su algebre di von Neumann di tipo III.

4) Presentazione dei risultati ottenuti sotto forma di articoli scientifici da sottomettere per la pubblicazione.

Le fasi 4) e 5) copriranno in gran parte il secondo e terzo anno di corso.

5) Stesura della tesi sulla scorta degli articoli menzionati al punto 4). Tale fase avrà luogo durante il terzo anno di corso.

10) Valutazione dei risultati

I risultati ottenuti saranno valutati attraverso il confronto con ricercatori esperti del settore, facenti parte anche di istituzioni diverse dall'ateneo, la divulgazione sotto forma di seminari da svolgersi in seno a convegni o workshops, i rapporti dei referees delle riviste scelte per la sottomissione degli articoli.

11) Eventuali referenti esterni al Dipartimento

Prof. Francesco Fidaleo, Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tor Vergata.