

**Dottorato di ricerca in Informatica e Matematica  
XXIX ciclo**

**Progetto di ricerca**

**Dottorando:** *Dott. Salvatore de Candia*

**Tutor:** *Prof. Maria Falcitelli*

**Coordinatore**

Prof. Donato Malerba

Firma del dottorando \_\_\_\_\_

Firma del tutor \_\_\_\_\_

## 1) Titolo della ricerca:

Sottovarietà di una varietà di quasi contatto metrica.

## 2) Area nella quale si inquadra la ricerca:

Geometria Riemanniana

## 3) Obiettivi della ricerca

Si intende effettuare uno studio sistematico di opportune sottovarietà Riemanniane di una varietà di quasi contatto metrica. In particolare, ci si propone di individuare, come spazio ambiente, le varietà in una opportuna classe di Chinea-Gonzalez. Si osserva che, in base alla classificazione ottenuta in [16], è possibile individuare  $2^{12}$  varietà di quasi contatto metriche.

Successivamente si intende stabilire proprietà generali delle sottovarietà “slant” (oblique), “semi-slant”, “hemi-slant” e “pointwise-slant” di una prefissata varietà. Si dovrebbero dedurre condizioni per l'esistenza di siffatta immersione e ottenere esempi espliciti.

## 4) Motivazioni della ricerca

A partire dagli anni '80 si è sviluppato un filone di ricerca vasto e di carattere internazionale nell'ambito della geometria quasi-Hermitiana, ovvero lo studio delle sottovarietà CR (Cauchy-Riemann), slant, semi-slant, quasi-slant, hemi-slant di una varietà quasi-Hermitiana.

Si sono introdotti analoghi concetti nel caso di sottovarietà di una varietà di quasi contatto metrica. Attualmente sono noti numerosi risultati quando lo spazio ambiente è dotato di una struttura particolare, per esempio cosimpletta, di Sasaki, di Kenmotsu.

Da una prima ricerca bibliografica non risulta effettuata un'indagine sistematica sulle immersioni in questione, nel caso in cui la struttura dello spazio ambiente sia di tipo più generale.

L'interesse del problema consiste nel fatto che, mediante le strutture di quasi contatto, si può descrivere la geometria di varietà di dimensione dispari, geometria che è oggetto di notevole interesse nell'ambito della Fisica teorica.

## 5) Stato dell'arte

A partire dalla prima metà del '900 molti matematici, esperti nel campo della geometria differenziale, si sono occupati dello studio di varietà differenziabili di classe  $C^\infty$  munite di una opportuna struttura e della teoria delle sottovarietà Riemanniane di una varietà siffatta.

In particolare sono stati esaminati due tipi fondamentali di struttura: quasi Hermitiana (varietà di dimensione pari), di quasi contatto metrica (varietà di dimensione dispari).

Storicamente si è sviluppata prima la teoria delle varietà quasi Hermitiane, per le quali i matematici Gray e Hervella hanno fornito, nel 1981, una classificazione nella quale sono state individuate 16 classi, di cui la più studiata è quella delle cosiddette varietà di Kähler, caratterizzate dal parallelismo della struttura quasi complessa rispetto alla connessione di Levi-Civita.

Successivamente si è introdotto e studiato il concetto di varietà di quasi contatto metrica. Per tali varietà Chinea e Gonzalez nel '90 hanno fornito una classificazione, individuando ben  $2^{12}$  classi [16] ed esplicitandone il legame con opportune strutture quasi Hermitiane.

Relativamente allo studio delle sottovarietà Riemanniane, si è prima esaminato il caso in cui la varietà ambiente sia quasi Hermitiana e, in tale contesto, A. Bejancu nel '78 [4] ha introdotto e studiato in modo sistematico il concetto di sottovarietà CR (Cauchy-Riemann).

Successivamente, nel 1990, B. Y. Chen ha introdotto in [15] il concetto fondamentale di sottovarietà slant (obliqua) generalizzando, sostanzialmente, le nozioni classiche di sottovarietà olomorfe (note anche come invarianti) e totalmente reali (note anche come anti-invarianti).

Successivamente, queste nozioni di sottovarietà sono state date e studiate nel caso di varietà ambiente di quasi contatto metrica.

In particolare tra gli anni '96-'99 A. Lotta ha stabilito importanti proprietà per le sottovarietà slant, dimostrando, in particolare, che una sottovarietà slant ha dimensione pari se e solo se il campo di Reeb  $\xi$  della varietà ambiente è ortogonale alla sottovarietà e, in modo complementare, che la sottovarietà ha dimensione dispari se e solo se il campo  $\xi$  è tangente alla sottovarietà.

Inoltre se la varietà ambiente è di contatto e se il campo  $\xi$  è normale alla sottovarietà in questione (in tal caso si considera una arbitraria sottovarietà), si ha che la sottovarietà è anti-invariante [26, 27, 28].

Da una prima ricerca bibliografica risulta che lo studio delle sottovarietà slant sia stato effettuato in opportune classi di varietà di quasi contatto metriche per esempio di Sasaki, di Kenmotsu, cosimpletliche e trans-Sasaki, privilegiando il caso di varietà ambiente Sasakiana, per il quale  $\xi$  è necessariamente tangente alla sottovarietà in questione.

Pertanto è di interesse esaminare nei dettagli le sottovarietà slant di dimensione pari, ovvero quelle a cui il campo di Reeb è normale.

Nel 1994 N. Papaghiuc ([32]) ha introdotto il concetto di sottovarietà semi-slant di una varietà quasi Hermitiana stabilendone le proprietà fondamentali.

Analagamente, nel '99, J. L. Cabrerizo e tutti hanno introdotto, in [9], l'analoga nozione nell'ambito della geometria di quasi contatto, privilegiando sempre come classi di varietà ambiente quelle menzionate precedentemente.

Agli inizi degli anni 2000, A. Carriazo ha introdotto la nozione di sottovarietà anti-slant, sia nell'ambiente quasi Hermitiano che in quello di quasi contatto, come caso particolare della classe delle sottovarietà bi-slant. Poiché il termine anti-slant potrebbe far pensare alla non presenza di un fattore slant, successivamente, per evitare equivoci, V. A. Khan, M. A. Khan e B. Shain hanno chiamato tali sottovarietà hemi-slant.

Anche per questa classe di sottovarietà i principali risultati si sono ottenuti nel caso in cui la varietà ambiente sia Sasakiana, Kenmotsu, cosimpletlica ([22, 25, 37]).

È pertanto interessante studiare le sottovarietà hemi-slant immerse in una varietà di quasi contatto che non sia del tipo già menzionato.

## 6) Approccio al problema

Si intende sviluppare la ricerca nel seguente modo:

- 1) approfondimentobibliografico.
- 2) Individuazione di una classe di varietà di quasi contatto metriche che fungano da spazio ambiente delle immersioni.

Ovviamente, per ottenere nuovi risultati, la classe in questione non deve coincidere con alcuna di quelle già considerate (Sasaki, Kenmotsu, cosimpletliche, trans-Sasaki, nearly trans-Sasaki, nearlyKenmotsu).

- 3) Determinazione delle proprietà fondamentali delle varietà di cui al punto 2), con particolare

attenzione alla curvatura, in quanto quest'ultima influisce notevolmente sulla curvatura della sottovarietà.

- 4) Indagine dettagliata sulle sottovarietà slant, semi-slant, ecc...di una varietà della classe di cui ai punti 2), 3).

In particolare, si intende studiare le sottovarietà slant in entrambi i casi: il campo vettoriale di Reeb della varietà ambiente è tangente/normale alla sottovarietà. Infatti, dalla ricerca bibliografica finora effettuata si è osservato che, sostanzialmente, solo il primo caso è stato soggetto di studio.

- 5) Teoremi di esistenza (o non esistenza) di sottovarietà soddisfacenti opportune condizioni. Descrizione di esempi espliciti.

## 7) Ricadute applicative

Allo stato attuale, non si possono esporre le applicazioni della problematica da affrontare.

Si citano alcune applicazioni recentemente ottenute da matematici esperti nel settore, strettamente collegate alla teoria dei campi magnetici, alla teoria dei cristalli liquidi e alla computer graphics (si veda anche [13], [20], [30], [31], e la relativa bibliografia).

In particolare, in [13] si studiano particolari curve slant, dette "slanthelices", immerse in una varietà di contatto di dimensione 3. Ciò consente di determinare completamente il flusso magnetico del campo di contatto in una varietà di Sasaki di dimensione 3.

L'indagine sulle sottovarietà slant di dimensione 2 è strettamente connessa allo studio delle superfici elicoidali, utilizzate nell'ambito della computer graphics, nonché delle superfici che formano angolo costante con una fissata direzione, che hanno un ruolo rilevante nell'ambito della teoria dei cristalli liquidi.

## 8) Riferimenti bibliografici

[1] P. Alegre, A. Carriazo, "Submanifolds of generalized Sasakian space forms", Taiwanese J. Math. **13**, no. 3, pp. 923-941, 2009

[2] F.R. Al-Solamy, V.A. Khan, "A note on slant submanifolds of a nearly trans-Sasakian manifolds", Math.Slovaca**60**, no. 1, pp. 129-136, 2010

[3] F.R. Al-Solamy, M.A. Khan, "Pseudo-slant warped product submanifolds of a Kenmotsu manifold", Math.Morav. **17**, no. 2, pp. 51-61, 2013

[4] A. Bejancu, "CR-submanifolds of a Kähler manifold I", Proc. Amer. Math. Soc. **69**, no. 1, pp. 135-142, 1978

[5] A.Bejancu, "Geometry of CR-submanifolds", Mathematics and its Applications, Kluwer Academic publisher, Dordrecht, 1986

[6] A. Bejancu, N. Papaghiuc, "Almost semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold", Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumaine**28**, no. 1, pp. 13-30, 1984

- [7] D.E. Blair, “*Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*”, Progress in Mathematics, vol. 203, Springer Science and Business Media, 2002
- [8] D.E. Blair, B.Y. Chen, “*On CR-submanifolds of Hermitian manifolds*”, Israel J. Math. **34**, no. 4, pp. 353-363, 1980
- [9] J.L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernandez, M. Fernandez, “*Semi-slant submanifolds of a Sasakian manifold*”, Geom.Dedicata**78**, no. 2, pp. 183-199, 1999
- [10] J.L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernandez, M. Fernandez, “*Slant submanifolds in Sasakian manifolds*”, Glasgow Math. J.**42**, no. 1, pp. 125-138, 2000
- [11] J.L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernandez, M. Fernandez, “*Structure on a slant submanifold of a contact manifold*”, Indian J. pure appl. Math.**31**, no. 7, pp. 857-864, 2000
- [12] J.L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernandez, M. Fernandez, “*Existence and uniqueness theorem for slant immersion in Sasakian-space-forms*”, Publ. Math. Debrecen **58**, no. 4, pp. 559-574, 2001
- [13] J.L. Cabrerizo, M. Fernandez, J.S. Gomez, “*On the existence of almost contact structure and the contact magnetic field*”, Acta Math.Hungar. **125**, no. 1-2, pp. 191-199, 2009
- [14] C. Călin, M. Crasmareanu, M.I. Munteanu, V. Saltarelli, “*Semi-invariant  $\xi^\perp$ -submanifolds of generalized quasi-Sasakian manifolds*”, Taiwanese J. Math.**16**, no. 6, pp. 2053-2062, 2012
- [15] B.Y. Chen, “*Slant immersions*”, Bull. Austral. Math. Soc.**41**, no. 1, pp. 135-147, 1990
- [16] D. Chinea, C. Gonzalez, “*A classification of Almost Contact Metric Manifolds*”, Annali di Matematicapuraedapplicata, vol. CLVI, pp. 15-36, 1990
- [17] J.T. Cho, J.I. Inoguchi, J.E. Lee, “*On Slant curves in Sasakian 3-manifolds*”, Bull. Austral. Math. Soc. **74**, no. 3, pp. 359-367, 2006
- [18] F. Etayo, “*On quasi-slant submanifolds of an almost Hermitian manifold*”, Publ. Math. Debrecen **53**, no. 1-2, pp. 217-223, 1998
- [19] R.S. Gupta, “*Non-existence of contact totally umbilical proper slant submanifolds of a Kenmotsu manifold*”, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **69**, no. 1, pp. 51-55, 2011
- [20] L. Hitt, I.M. Roussos, “*Computer Graphics of Helicoidal Surfaces with Constant Mean Curvature*”, An. Acad. Bras.Ci**63**, pp. 211-228, 1991
- [21] S. Hong, M.M. Tripathi, “*Ricci curvature of submanifolds of a Sasakian space form*”, Iranian J. Math. Sciences **1**, no. 2, pp. 31-51, 2006
- [22] M.A. Khan, “*Totally umbilical Hemi-slant submanifolds of Cosymplectic manifolds*”, Math. Aeterna**3**, no. 8, pp. 645-653, 2013
- [23] V.A. Khan, M.A. Khan, “*Semi-slant submanifolds of trans-Sasakian manifolds*”, Sarajevo J. Math.**2**, no. 1, pp. 83-93, 2006

- [24] V.A. Khan, M.A. Khan, K.A. Khan, “*Slant and semi-slant submanifolds of a Kenmotsu manifold*”, Math. Slovaca **57**, no. 5, pp. 483-494, 2007
- [25] M.A. Khan, S. Uddin, K. Singh, “*A classification on totally umbilical proper slant and hemi-slant submanifolds of a nearly Sasakian manifold*”, Diff. Geo. Dyn. Syst. **13**, pp. 117-127, 2011
- [26] A. Lotta, “*Slant submanifolds in contact geometry*”, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **39**, no. 1-4, pp. 183-198, 1996
- [27] A. Lotta, “*Three-dimensional slant submanifolds of  $k$ -contact manifolds*”, Balkan J. Geom. Appl. **3**, no. 1, pp.37-51, 1998
- [28] A. Lotta, “*Foliations of the Sasakian space  $R^{2n+1}$  by minimal slant submanifolds*”, Acta Math. Hungar. **84**, no. 1-2, pp. 135-148, 1999
- [29] M.I. Munteanu, “*A note on doubly warped product contact CR-submanifolds in trans-Sasakian manifolds*”, Acta Math. Hungar. **116**, no. 1-2, pp. 121-126, 2007
- [30] M. I. Munteanu, “*From Golden spirals to constant slope surfaces*”, J. Math. Phys. **51**, no. 7, 073507, 9 pp., 2010
- [31] M.I. Munteanu, A.I. Nistor, “*Surfaces in  $E^3$  making constant angle with Killing vector fields*”, Internat. J. Math. **23**, no. 6, 1250023, 16 pp., 2012
- [32] N. Papaghiuc, “*Semi-slant submanifolds of a Kaehlerian manifold*”, An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi Secţ. I a Mat **40**, no. 1, pp. 55-61, 1994
- [33] B. Sahin, “*Warped product pointwise semi-slant submanifolds of Kähler manifolds*”, Preprint arXiv: 1310.2813v2 (Math. DG), December 2013
- [34] K. Singh, S.S. Bhatia, “*Some inequalities on hemi-slant product submanifolds in a Cosymplectic manifold*”, Preprint arXiv: 1207.2257v1, Math. DG, 2012
- [35] M.M. Tripathi, “*Almost semi-invariant submanifolds of trans-Sasakian manifolds*”, J. Indian Math. Soc. **62**, no. 1-4, pp. 225-245, 1996
- [36] S. Uddin, Z. Ahsan, A.H. Yaakub, “*Classification of totally umbilical slant submanifolds of a Kenmotsu manifold*”, Preprint arXiv:1404.3791v2, Math. DG, Aprile 2014
- [37] S. Uddin, C. Ozel, M.A. Khan, K. Singh, “*Some classification results on totally umbilical proper slant and hemi-slant submanifolds of a nearly Kenmotsu manifold*”, Internat. J. Phys. Sci. **7(40)**, pp. 5538-5544, 2012

## 9) Fasi del progetto

Il progetto si suddivide in sei fasi, alcune delle quali già esposte al punto 6) della presente relazione. Nel seguente elenco, ove è possibile, si precisano i tempi e le modalità di attuazione.

- 1) Ricerca bibliografica. Essa è effettuata mediante la consultazione di cataloghi disponibili online, accedendo a banche dati, ad esempio il MathSciNet, ove compaiono le recensioni di articoli e monografie.  
Individuate le pubblicazioni inerenti l'argomento di interesse, si procede a reperire la pubblicazione al fine di studiarne il contenuto. Si prevede di completare questa ricerca entro il primo anno di dottorato.
- 2) Studio delle pubblicazioni di cui al punto 1). Questa fase sarà sviluppata insieme alla fase 1) e proseguirà per alcuni mesi dell'anno successivo.
- 3) Individuazione delle varietà nell'ambito delle quali studiare le immersioni e indagine delle relative proprietà geometriche.  
Sono necessari, oltre che un'intensa attività di studio, colloqui sia con il tutor che con esperti della sede o di altre università. Attualmente non si può quantificare il tempo necessario a ultimare questa fase.  
I risultati ottenuti saranno esposti nella tesi finale ed, eventualmente, in un articolo da sottoporre a pubblicazione.
- 4) Indagine dettagliata delle sottovarietà slant, quasi-slant, ecc... delle varietà di cui al punto 3).  
Le metodiche e i risultati attesi sono simili a quelli descritti in 3).
- 5) Formulazione e dimostrazione di teoremi e determinazione di esempi espliciti. Si prevede di completare questa fase entro il terzo anno.
- 6) Stesura della tesi e di eventuali articoli da sottoporre a pubblicazione.

## **10) Valutazione dei risultati.**

Essa può avvenire tramite colloquio diretto con esperti del settore, anche in occasione di convegni e di soggiorni presso altre sedi universitarie. Un altro canale è la lettura di "reports" effettuati da referees contattati dal comitato editoriale di una rivista.

## **11) Eventuali referenti esterni al Dipartimento**

I nominativi saranno precisati in seguito.